ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXIX, zeszyt 1 — 1981

ANNA IZABELLA BUCZEK

ROLA ANALOGII MIĘDZY SKOŃCZONOŚCIĄ I NIESKOŃCZONOŚCIĄ W STAWIANIU ZAGADNIEŃ MATEMATYCZNYCH *

Zagadnienie nieskończoności interesowało matematyków od najdawniejszych czasów. Podejmowane ciągle próby jego rozstrzygnięcia działały inspirująco na umysły matematyków i filozofów [1]. Pytanie o sposoby rozumienia nieskończoności, a zwłaszcza pytanie o sposób jej istnienia, jest jednak typowym zagadnieniem filozoficznym. Ponieważ zarówno matematyk, jak i filozof posługują się pojęciem nieskończoności oraz podejmują problematykę z nim związaną, pojawiały się na przestrzeni dziejów próby harmonizowania rozwiązań osiągniętych w obu dyscyplinach. Zauważone sprzeczności w operowaniu pojęciem nieskończoności w jednej nauce wywierały wpływ na próby lepszego zdeterminowania go w drugiej. W filozofii matematyki odegrały szczególną rolę dwa opozycyjne stanowiska dotyczące rozumienia nieskończoności: arystotelesowskie i bolzanowskie. Dlatego jeśli mamy zastanowić się nad rolą, jaką analogia między tym, co skończone, i tym, co nieskończone, pełni w dochodzeniu i w stawianiu zagadnień matematycznych, to powinniśmy najpierw choćby tylko roboczo ustalić, czym jest nieskończoność w mate-

* Artykuł jest nieco zmienionym fragmentem większej rozprawy, której znaczna część ukazała się w „Rocznikach Filozoficznych” 26 : 1978 z. 1 s. 161 - 253 pt. *Rola analogii w formułowaniu zagadnień matematycznych.*

[1] Jest faktem niemal bezspornym, iż na przestrzeni dziejów związki matematyki i filozofii były bardzo ścisłe. Nierzadko inspirujący wpływ na kształtowanie się myśli filozoficznej wywierała ówczesna matematyka. Wystarczy przypomnieć napis nad wejściem do Akademii Platońskiej „Kto nie zna matematyki, niech tu nie wchodzi” czy znane powiedzenie, iż „Kartezjusz matematyk zrodził Kartezjusza filozofa”. Kant np. uczynił z geometrii Euklidesa sprawdzian swoich sądów syntetycznych *a priori.* Źródeł zaś filozofii Bergsona szuka się obecnie wśród jego wcześniejszych zainteresowań matematyką. Por. A. B. Stępień. *Wstęp do filozofii.* Lublin 1976 s. 15; M. Heller. *Wobec wszechświata.* Kraków 1970 s. 33, 35; R. Waszkinel. *O źródłach filozofii Bergsona.* „Roczniki Filozoficzne” 25 : 1977 z. 1 s. 111 - 140.

matyce. Jakie sposoby jej rozumienia są przyjmowane, jaki jest jej stosunek do skończoności i wreszcie na czym polega analogia, która nas tu interesuje?

Przede wszystkim przedstawimy dwa sposoby pojmowania i rozwiązywania zagadnienia nieskończoności w matematyce, aby w następnym etapie rozważań podjąć próbę ustalenia, jaki charakter posiada analogia między tym, co skończone, i tym, co nieskończone, oraz jaką pełni ona funkcję w stawianiu problemów matematycznych.

1. Pojęcie nieskończoności pojawiło się u samego progu filozofowania. Początkowo jako bliżej nie sprecyzowana nieskończoność materialna, z której wszystko się wywodzi (filozofowie jońscy). Potem, gdy zaczęto rozważać różnego rodzaju proporcje i harmonie (pitagorejczycy), wystąpiło, aczkolwiek jeszcze nie całkiem świadomie, pojęcie nieskończoności jako pojęcie leżące u podstaw wszelkich aproksymacji. Najwyraźniej ujawniła je tzw. metoda wyczerpywania, która wówczas miała umożliwić i ułatwić przeprowadzenie kwadratury koła. Przy okazji zaś okazało się, że liczb, które można przyporządkować kolejnym odcinkom konstruowanych figur, jest nieskończenie wiele. Ogólnie mówiąc, próby dostrzeżenia i postawienia problemu nieskończoności, a także pewne propozycje dotyczące jego rozwiązania, które pojawiały się na terenie filozofii i matematyki w starożytności, były wzajemnie uwarunkowane. Jasno to widać na przykładzie pierwszej teoretycznie głębszej analizy samego pojęcia nieskończoności, jaka pochodzi od Arystotelesa [2].

Podejmował on problematykę nieskończoności w sposób możliwie pełny, i to na użytek zarówno filozofii, jak i matematyki. Zdawał sobie sprawę, że rozstrzygnięcia dokonane w tej materii na gruncie jednej teorii mogą okazać się pomocne dla dobrego posługiwania się tym pojęciem w drugiej. Rozpoczął od ustalenia, przynajmniej ogólnie, różnych znaczeń samego terminu. W III księdze *Fizyki* wyróżnił właśnie co najmniej pięć znaczeń terminu „nieskończoność". Nazywa nieskończonością to, co — używając jego języka — z natury swej nie może być prześledzone, lub to, co może być wprawdzie śledzone, ale proces ten nie da się doprowadzić do końca. Może też być to, co z trudem tylko da się prześledzić. Albo wreszcie to, co z natury swej może być przedmiotem badania, lecz dokładnie nie da się prześledzić albo nie ma końca. Oprócz tego

[2] Historyczne ujęcie podstawowych pojęć matematyki, zilustrowane odpowiednimi wyjątkami z klasycznych dzieł, przedstawia O. Becker w pracy: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. 3. Aufl. Freiburg—München 1975. Odnośnie do nieskończoności w matematyce najbardziej typowe poglądy umieszczone są na s. 64 - 69, 258 n., 273 - 316.

może być nieskończone to wszystko, co powstaje przez dodawanie albo przez podział, albo na skutek obydwu czynności razem [3].

Nie wdając się w dokładną eksplikację przytoczonych dość schematycznie znaczeń spróbujmy z filozoficznego podejścia Arystotelesa do nieskończoności wydobyć to, co jest szczególnie interesujące dla naszych rozważań. Przede wszystkim ważne jest, co z tych dokonanych rozróżnień znajduje swoje odniesienie w matematyce, a zatem, co mówi Arystoteles na temat zbioru nieskończonego. Według niego nieskończony jest taki zbiór, do którego można ciągle dobierać z zewnątrz jakiś nowy element. To zaś, co nie ma już nic na zewnątrz, jest skończone i zupełnie zamknięte. Znaczy to, że dla zbioru nieskończonego istnieje ciągle możność uzupełniania go przez dołączanie nowych elementów. A zatem nieskończoność typu matematycznego zostaje potraktowana jako proces niewyczerpalnego powiększania, jako nigdy nie kończąca się czynność wyliczania elementów zbioru. Nic więc dziwnego, że tak rozumianemu zbiorowi przypisuje Arystoteles tylko istnienie potencjalne. Istota tego zbioru tkwi bowiem w potencjalności, nieograniczoności, nieposiadaniu kresu, w niewykończoności, w możliwości ciągłego uzupełniania. Jedynie zbiorom skończonym (już niepowiększalnym, już wykończonym) można, zdaniem Arystotelesa, przyznać istnienie aktualne.

Proponowane przez Arystotelesa rozwiązanie jest najlepszym przykładem spójności, jaka w starożytności zachodziła między myślą filozoficzną a innymi dziedzinami wiedzy. Jest ono bowiem prostą konsekwencją filozoficznie doniosłego odróżnienia potencji od aktu. Przez wiele następnych wieków było ono głównym poglądem na sprawę nieskończoności i zasadniczym źródłem posługiwania się pojęciem nieskończoności. Zdecydowane odrzucenie aktualnej nieskończoności i traktowanie potencjalnej jako jedynego sposobu istnienia nieskończoności, także i w matematyce, stało się przyczyną ujawniających się w dalszych wiekach tendencji do mistycznego niemal ujmowania tego pojęcia. Dopiero w XVII w., gdy powstawał rachunek nieskończonościowy i pojawiła się trudność w operowaniu nieskończenie małymi i nieskończenie dużymi wielkościami, zaczęto się interesować, ale już od strony czysto rachunkowej, a nie teoretycznej, jak przyporządkować ten nowy rachunek dobrze znanemu rachunkowi operującemu skończonymi wielkościami [4]. Akcent przy ta-

---

[3] Por. A r y s t o t e l e s. *Fizyka*. Tłum. K. Leśniak. Warszawa 1968 III 4 202 b - - 8 208 a.

[4] Prostą formę rachunku nieskończonościowego podał w 1635 r. B. Cavalieri, opierając się na scholastycznym pojęciu wielkości niepodzielnej. Ale pierwszym matematykiem, który rozwijając algebrę, uczynił z niej prawdziwą analizę, był J. Wallis (1616 - 1703). Jego metody operowania procesami nieskończonymi były często nieścisłe, ale uzyskał wiele nowych wyników. Wprowadził szeregi i iloczy-

kim podejściu do zagadnienia położono znowu na sprecyzowaniu metody poprawnego operowania liczbami nieskończonymi. Szukano mianowicie takiej metody, aby posługiwanie się nieskończonością nie prowadziło do paradoksów. Te poszukiwania doprowadziły w końcu do uściślenia (przez Cauchy'ego) pojęcia granicy. Wprawdzie posługiwano się w definicji granicy nadal pojęciem nieskończoności potencjalnej, ale niedługo G. Cantor (twórca teorii mnogości — matematycznej teorii zbiorów nieskończonych) zwrócił uwagę na możliwość posługiwania się w niej także nieskończonością aktualną.

Na blisko trzydzieści lat przed Cantorem z propozycją, aby nieskończonością nazywać nie tyle proces powiększania jakiegoś zbioru (jak u Arystotelesa), ale właśnie rezultat tego procesu, wystąpił B. Bolzano. Dlatego zbiorem nieskończonym nazwał on taką „wielość, która jest większa od każdej wielości skończonej, tzn. wielość nieskończona jest tego rodzaju, że każda skończona mnogość przedstawia tylko pewną jej część" [5].

Swe rozważania przeprowadzał on na terenie logiki i matematyki. Broniąc takiego rozumienia nieskończoności odrzucał więc filozoficzne podejście do tej problematyki. A mimo to wprowadził tzw. relatywne pojęcie nieskończoności, dzięki któremu można mówić w matematyce o wielu rozmaitych bytach nieskończonych.

Zasługą Bolzano jest nie tyle podanie dokładnego określenia nieskończoności czy rozwiązanie paradoksów związanych z jej pojawieniem się i występowaniem, ile podjęcie próby ukazania genezy i natury tych paradoksów. To pozwoliło mu na uzasadnianie tak rozumianych zbiorów nieskończonych przez wykazanie, że zaproponowane pojęcie jest poprawne oraz że nie otrzymuje się sprzeczności (paradoksu) w przyjmowaniu istnienia aktualnego zbiorów nieskończonych.

W XIX w. na ukształtowanie się odpowiednich tendencji w rozwiązywaniu problemu nieskończoności wywarły wpływ z jednej strony filozoficzne poglądy Kanta, a z drugiej powstanie geometrii nieeuklidesowych i teorii mnogości. Kant głosił, że formy umysłu są takie, iż mogą ujmować tylko skończone obiekty. Ten pogląd miał zadecydować o póź-

---

ny nieskończone oraz używał symbolu ∞ zamiast 1/0. Jednak dopiero odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego przez J. Newtona i W. Leibniza otworzyło drogę do rachunkowego opanowania poprawnego posługiwania się nieskończonością. Por. np.: D. I. Struik. *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku.* Wyd. 2. Warszawa 1963 s. 142 n.; *Historia matematyki.* Red. A. P. Juszkiewicz. T. 1: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych.* Warszawa 1975 s. 261 n. oraz t. 2: *Matematyka XVII stulecia.* Warszawa 1976 s. 142 - 229.

[5] B. Bolzano. *Paradoksy nieskończoności.* Przekł. L. Pakalska. Warszawa 1966 s. 8 n.

niejszym odrzuceniu geometrii nieeuklidesowych, mimo to, że w matematyce znajdowały one coraz więcej zwolenników, wbrew filozoficznym uprzedzeniom. W nowo powstałej teorii mnogości zaś wyłonił się problem dobrego określenia pojęcia zbioru nieskończonego tak, aby nie otrzymywano w niej antynomii. W związku z tymi nastawieniami ujawniły się dwie tendencje: empirystyczna, która zmierzała do całkowitego eliminowania nieskończoności, oraz formalistyczna, która dążyła do znalezienia rozwiązania gwarantującego dobre posługiwanie się nieskończonością bez wprowadzania antynomii. Obydwie tendencje przybrały później bardziej zdecydowany charakter. Empirystyczna przekształciła się w kierunek intuicjonistyczny, zaś druga stawała się wyraźniej apriorycznо-formalistyczną [6].

Od czasów Bolzana i Cantora idea nieskończoności potencjalnej schodzi na plan dalszy. Zaczęto bardziej odróżniać nieskończoność zbioru jako wyniku pewnych operacji od samej operacji nieskończonej. Zwłaszcza odkrycie występujących na terenie teorii mnogości antynomii narzuciło konieczność ponownego zajęcia się problematyką nieskończoności i zaproponowania skutecznych rozwiązań. Odżył stary spór między logicystami i formalistami z jednej strony a intuicjonistami z drugiej.

Zwolennicy aktualnej nieskończoności (logicyści i formaliści) uważali, że antynomie są wynikiem intuicyjnego posługiwania się pojęciem zbioru. Dlatego wprowadzili pewne ograniczenia dla posługiwania się terminem „zbiór" (nieskończony), ustalając apriorycznie przez przyjęcie odpowiednich postulatów zarówno samo pojęcie, jak i sposób takiego używania go, aby nie prowadziło ono do antynomii. Powszechnie przyjęto zbiór X nazywać skończonym, jeżeli jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych (1, 2, . . . , n) dla pewnego n. Tym samym negatywnie zdefiniowano zbiór nieskończony jako taki, który nie posiada tej własności. Oprócz tego wprowadzono równoważne z nim pojęcie zbioru nieskończonego w sensie Dedekinda, tzn. pojęcie zbioru nieskończonego, który jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym. Okazało się, że z pewnymi ograniczeniami (np. nie można tworzyć w nieskończoność zbiorów, bo już do sprzeczności prowadzi pojęcie zbioru wszystkich liczb kardynalnych) można budować bogate systemy tak rozumianych zbiorów. Widać bez trudu, że nowoczesne ujęcia teorii zbiorów nieskończonych idą po linii rozważań Bolzana, a nawet w wielu punktach są z nimi zupełnie zgodne.

Zwolennicy zaś drugiej tendencji (intuicjoniści) uważają, że anty-

[6] Korzystano w tym miejscu z notatek do wykładu ks. prof. dra S. Kamińskiego z filozofii matematyki prowadzonego w roku akademickim 1975/76 na Wydziale Filozofii Chrześcijańskiej KUL.

nomie świadczą o nieprzydatności aktualnej nieskończoności. Konstruktywiści (pozostający w nurcie intuicjonizmu) również występują przeciw swobodnemu posługiwaniu się aktualną nieskończonością, rodzi bowiem ona antynomie. W konsekwencji odrzucają oni większą część kantorowskiej teorii mnogości, nie przyjmując istnienia zbiorów nieskończonych o mocy kontinuum (czyli większej niż moc zbioru liczb naturalnych). Jako pozytywne kryterium istnienia obiektów matematycznych podają intuicjoniści ich konstruowalność; istnieje tylko to, co daje się skonstruować za pomocą pewnych przyjętych operacji. Dlatego spośród zbiorów nieskończonych uważają intuicjoniści za istniejące jedynie zbiory przeliczalne (zbiory równoliczne z nieskończonym zbiorem liczb naturalnych). Źródeł antynomii dopatrują się oni m. in. w nieuprawnionym przenoszeniu intuicji zbiorów skończonych na zbiory nieskończone [7].

A zatem na gruncie intuicjonistycznie uprawianej matematyki bezprzedmiotowe mogą się wydawać rozważania dotyczące roli, jaką odgrywa w stawianiu zagadnień matematycznych analogia między tym, co skończone, a tym, co nieskończone. Negatywna bowiem ocena tej roli tkwi już w przyjętych przez intuicjonistów filozoficznych założeniach odnoszących się do podstaw matematyki.

Podejmiemy mimo to próbę rozważenia, jak faktycznie funguje w matematyce współczesnej nieskończoność i czy dadzą się zauważyć jakieś typy analogii, występujące między tym, co skończone, i tym, co nieskończone. Zastanowimy się też, czy zachodzi istotna różnica między innymi typami analogii, które są wykorzystywane przy stawianiu zagadnień matematycznych, a tą, tak bardzo swoistą dla matematyki.

2. W praktyce badawczej matematyków dają się zauważyć rozmaite sposoby korzystania z analogii między skończonością i nieskończonością. Już wspomniane siedemnastowieczne próby rachunkowego opanowania nieskończoności oparte były na założeniu (mniej lub bardziej uświadomionym) o analogii między tym, co skończone, i tym, co nieskończone. Analogia ta raczej fungowała nieświadomie w spontanicznej czynności umysłu ludzkiego, któremu właściwe są pewne struktury myślowe, niż była dającą się ściśle uzasadnić analogią struktury. Często można zauważyć, iż posługiwanie się analogiami, zwłaszcza w celach odkrywczych, jest wyrazem naturalnej skłonności do naśladowania, kojarzenia różnych, podobnych przedstawień, traktowania nieznanego na wzór pozna-

[7] Por. np.: E. S k a r ż y ń s k i. *Kilka uwag o pojęciu nieskończoności w matematyce.* „Ruch Filozoficzny" 34 : 1976 s. 69 - 74; M. L u b a ń s k i. *Arystotelesowskie i Bolzanowskie pojęcie nieskończoności.* „Roczniki Filozoficzne" 19 : 1971 z. 3 s. 77 - 81.

nego [8]. Takie postępowanie może być inspirowane istotnym podobieństwem przedmiotów lub ich zbiorów, ale bywa też często rezultatem zauważonego podobieństwa przedmiotów pod względem szeregu cech nieistotnych. Stąd różna może być wartość poznawcza uzyskanych na takiej podstawie wyników. Jest to jednak sprawa uprawomocnienia rozumowania opartego na analogiach rozmaicie ugruntowanych w podobieństwach przedmiotów. Ale nawet wtedy, gdy trudno analogii (i rozumowaniu przez analogię) przypisać rolę uzasadniającą we wnioskowaniach jakiejś dziedziny, to jednak nie należy jej tym samym odmawiać roli inwencyjnej, inspirującej do stawiania nowych zagadnień czy wysuwania nowych hipotez.

Wydaje się, że taka właśnie sytuacja była źródłem wzrostu problematyki związanej z wprowadzeniem nieskończoności do rozważań matematycznych. Powstawała ona bowiem dzięki mniej lub bardziej uzasadnionej analogii, która dostarczała pomysłów traktowania tego, co nieznane (wielkości nieskończenie małe oraz nieskończenie duże), podobnie do dobrze znanych i rachunkowo dobrze opracowanych liczb skończonych.

Leibniz np. posługiwał się nieskończenie małą wielkością Δx tak, jakby miał do czynienia z zerem. Pisał bowiem $a+\Delta x=a$, ale nie chciał zgodzić się na utożsamienie Δx z zerem. Przeświadczenie o poprawności liniowego przejścia uogólniającego od tego, co skończone, do tego, co nieskończone, towarzyszyło matematykom od czasu, gdy okazało się, że tak dobrze znany i podstawowy ciąg liczb naturalnych jest nieskończony. Ujawniające się co jakiś czas trudności związane z posługiwaniem się nieskończonością modyfikowały tylko i uściślały warunki poprawności tej operacji, ale nie wykluczały wszelkiej możliwości przeniesienia działań, pojęć oraz pewnych twierdzeń, a nawet niektórych metod ze skończonego rachunku na nieskończony [9].

---

[8] J. Piaget wprowadził termin abstrakcja reflektywna (franc. *abstraction réfléchissante)* dla określenia abstrakcji wyprowadzanej z czynności podmiotu i cech tych czynności, w przeciwieństwie do abstrakcji prostej, zwanej przez autora empiryczną, która jest wyprowadzana z samych przedmiotów i ich właściwości. Dzięki temu terminowi łatwiej opisuje twórczą działalność matematyków. „Matematycy, którzy dzięki „abstrakcji reflektywnej" wyprowadzają nowe operacje z operacji już poznanych, a także nowe struktury z porównania struktur dawniejszych, w swych współczesnych pracach wzbogacają najbardziej podstawowe pojęcia: nie przekreślają ich, lecz je reorganizują w sposób nieoczekiwany" (J. Piaget. *Psychologia i epistemologia*. Warszawa 1977 s. 17 - 18).

[9] Na przykład D. Hilbert zbudował teorię form kwadratowych o nieskończenie wielu zmiennych wprowadzając do niej pewne ograniczenia analogiczne do przypadków skończonych. Ograniczył zakres zmiennych przez żądanie, by suma kwadratów zmiennych była „zbieżna", tzn. miała wartość skończoną. Można ten fakt

Swoistego uprawomocnienia omawianego przejścia dostarcza, jak się wydaje, wspomniana analogia struktur myślowych czy właściwych człowiekowi czynności analogicznych umysłu. Istotną cechą myślenia matematycznego jest dążenie do coraz śmielszych uogólnień. Wydaje się więc, że operacja ta staje się pewnego rodzaju racją uzasadniającą możliwość przejścia — przynajmniej przy stawianiu nowych problemów i odkrywaniu nowych zagadnień — od tego, co skończone, do tego, co nieskończone. Uogólnienie w matematyce byłoby niepełne, gdyby przejawiało się wyłącznie w przechodzeniu od szczegółowych przypadków do ogólnych, ale z istotnym ograniczeniem tylko do skończonych. Ono w sposób naturalny domaga się pójścia dalej i postawienia pytania: co się będzie działo w nieskończoności? Czy określone działania zachowują swoje wszystkie czy tylko niektóre własności? Kiedy uprawniona jest ekstrapolacja działań, własności, pojęć, twierdzeń i metod aż do nieskończoności? A także czy zbyt śmiała albo czysto mechaniczna ekstrapolacja nie prowadzi do błędnych wniosków, antynomialnych pułapek i nieprzewidzialnych trudności?

Zwrócenie uwagi na niebezpieczeństwo związane z konstrukcją obiektów z nieskończonymi charakterystykami i możliwość otrzymania rozmaitych paradoksów przy nieostrożnym stosowaniu ekstrapolacji (przekraczającej czasem prawomocność jej zastosowania) rodzi nowe problemy i wskazuje na konieczność każdorazowego sprawdzenia podstawy uogólniającego przejścia. Te charakterystyczne trudności, w które obfituje analogia między tym, co skończone, i tym, co nieskończone, powo-

---

wyrazić za pomocą uogólnionego twierdzenia Pitagorasa, żądając, aby punkt przestrzeni Hilberta o nieskończenie wielu wymiarach miał skończoną odległość od początku układu współrzędnych. Zdefiniował formę kwadratową ograniczoną — jako podwójną sumę nieskończoną i nałożył na nią warunek, aby była zbieżna we wszystkich punktach przestrzeni. W takiej przestrzeni zachowuje sens wiele pojęć związanych z własnościami płaszczyzn i powierzchni stopnia drugiego w geometrii skończenie wymiarowej. Np. każda forma kwadratowa należąca do tej klasy może być sprowadzona do postaci normalnej za pomocą obrotu układu współrzędnych. Przez analogie z przypadkiem skończenie wymiarowym Hilbert nazwał zbiór wartości współczynników występujących w tej postaci normalnej „spektrum" formy kwadratowej. Inni uogólnili teorię spektralną D. Hilberta przez przejście od przypadku szczególnego operatorów liniowych „ograniczonych" do operatorów liniowych „nieograniczonych". Zarzucili oni hilbertowską koncepcję formy kwadratowej jako czegoś, co można wyrazić konkretnie w postaci nieskończonego wyrażenia algebraicznego i sformułowali zamiast niego pojęcie abstrakcyjne, unikając dzięki temu poprzednich ograniczeń. Otrzymano przez to rozszerzoną teorię spektralną, która znalazła zastosowanie w fizyce współczesnej. Por. R. Courant. *Matematyka w świecie współczesnym*. W: *Matematyka w świecie współczesnym. Zbiór artykułów z „Scientific American"*. Warszawa 1967 s. 21 n.

dują, że staje się ona szczególnie interesującym oraz najbardziej złożonym przypadkiem analogii dającej podstawę do uogólniania [10].

Analiza analogii między tym, co szczegółowe, i tym, co ogólne, ujawniła, iż podstawy do uogólniającego przejścia w tym przypadku dostarcza podobieństwo głównie jakościowe, dotyczące jeśli nie wszystkich własności, to przynajmniej ich większości. W każdym razie jest to na ogół istotne podobieństwo zestawionych przedmiotów (w szerokim sensie), różnice zaś dotyczą głównie zmian ilościowych (ilość rozpatrywanych przedmiotów w zbiorze, liczby wymiarów, dopuszczenie do rozważań większej liczby przedmiotów przez zniesienie ograniczającego warunku itp.). Dlatego przy formułowaniu zagadnień na podstawie tej analogii rolę stymulującą spełnia przede wszystkim podobieństwo przedmiotów, i to na ogół podobieństwo, które można dość łatwo zauważyć, uchwycić, opisać i uzasadnić.

W przypadku analogii między tym, co skończone, a tym, co nieskończone, ma miejsce nieco inna sytuacja. Nie można generalnie powiedzieć, że jej zasadą jest istotne podobieństwo między porównywanymi przedmiotami. W każdym konkretnym zastosowaniu tego przejścia należy uzasadnić i wskazać jego podstawę, jeśli chce się uniknąć ewentualnych błędów czy paradoksów. Dzieje się tak dlatego, że przejście od skończoności do nieskończoności charakteryzuje się niejednokrotnie jasno uchwytnymi skokami jakościowymi. Przeważnie są one bardziej istotnymi różnicami niż podobieństwami porównywanych obiektów. Widać to już choćby w określeniu nieskończoności, którą wprowadza się definicyjnie jako zaprzeczenie tego, co stanowi o skończoności. O ile jednak uświadomienie sobie pewnej ograniczoności analogii między tym, co skończone, a tym, co nieskończone, nakazuje konieczność zachowania ostrożności w przypisywaniu jej roli uzasadniającej stosowanie wszelkich metod znanych z rachunku skończonego oraz przestrzega przed wyprowadzaniem pochopnych i zbyt pospiesznych wniosków czy daleko idących twierdzeń, o tyle udział tej analogii w odkrywaniu, stawianiu i formułowaniu zagadnień typowo matematycznych jest doniosły. Bowiem we wzroście i rozwoju problematyki mogą odgrywać (i faktycznie odgrywają) wcale niebanalną rolę nie tylko podobieństwa, ale i różnice, zwłaszcza oparte na przeciwstawieniach, ujęte za pomocą analogii. Warto przypomnieć, iż przy ogólnej charakterystyce analogii wskazaliśmy na konieczność jednoczesnego ujmowania zarówno podobieństw porównywanych przedmiotów, jak i występujących między nimi różnic [11]. Ze

[10] O uogólnianiu i analogii dostarczającej podstawy do przeprowadzania uogólnień zob.: Buczek, jw. s. 193 - 194, 203 - 213.

[11] Por. dyskusję w sprawie przyjęcia określonej koncepcji analogii oraz próbę krytycznej oceny pewnych stanowisk przeprowadzoną tamże (s. 172 - 174).

względu na inwencyjną rolę analogii w myśleniu matematycznym (nie tylko rozważanej tu analogii między tym, co skończone, i tym, co nieskończone) wydaje się to sprawą ważną i godną uwagi. Różnice bowiem również mogą naprowadzić na nowe zagadnienia dotyczące nieznanego obiektu czy nowej badanej dziedziny. Zwykle zostają one sformułowane w postaci pytań o własności badanego obiektu w stosunku do tego, co już jest znane. Czy własności porównywanych obiektów są podobne? Czy między tymi własnościami zachodzą jakieś relacje? Czy założona początkowo analogia może być w jakiś sposób uprawomocniona? Czy jest ona źródłem istotnego rozwoju danej dziedziny wiedzy? Czy może być podstawą innych uogólnień?

Pytania te wyrastają wprawdzie w związku i przy okazji uświadamiania sobie niebezpieczeństw i pułapek, jakie mogą wystąpić przy wprowadzaniu analogii między tym, co skończone, i tym, co nieskończone. Ukazują mimo to właściwy kierunek twórczej działalności badawczej matematyków. To, co nieskończone (i to zarówno obiekty, jak i operacje), bowiem wyraża się, a nawet i formułuje na podstawie tego, co skończone. Czyni się zaś to w różny sposób. Bądź dzięki utożsamieniu w tym czy innym sensie odpowiednich układów własności, bądź przez zanegowanie, przeciwstawienie lub odrzucenie pewnych własności, jako istotnie różnych lub prowadzących do paradoksów, bądź wreszcie przez ustanowienie albo odkrycie zupełnie nowych własności, które nie występowały w skończonych obiektach. Można to, jak się wydaje, dość łatwo zaobserwować, analizując zarówno rozwój historyczny pewnych dziedzin matematycznych, a zwłaszcza proces wprowadzania do nich problematyki nieskończoności, jak również śledząc cały kontekst odkrywania w twórczej pracy matematyka [12]. I jedno i drugie mogłoby okazać się bardzo interesujące z uwagi na możliwość ujawnienia poszczególnych faz i etapów przebiegu rozumowania (mniej lub bardziej świadomego) przez analogię, jak również pokazania rozmaitych rodzajów analogii ze względu na stopień zawartego w nich podobieństwa zestawianych obiektów. Można byłoby też prześledzić dokładniej te analogie, które tylko na zasadzie śmia-

---

[12] Nieodosobniony jest pogląd, według którego analogia jest jednym z mechanizmów intelektualnych warunkujących rozwój nauki. Nawet więcej, mówi się, że nauka jest procesem, który charakteryzuje jedność i ciągłość w czasie i przestrzeni. Gwarantują ją wspólne podstawy logiczne wszystkich dyscyplin oraz powroty dawnych idei w nowej, zmodyfikowanej formie. Dlatego znajomość dziejów tendencji w nauce może mieć wielką wartość heurystyczną. Niektórzy widzą tę sprawę jeszcze ostrzej, wyrażając przekonanie, że historia rozwoju myśli naukowej jest zasadniczo historią wnioskowania przez analogię o odpowiednich relacjach. Zob. np.: G. Sarton. *The Life of Science*. New York 1948; A. Arber. *Analogy in the History of Science*. W: *Studies and Essays in the History of Science and Learning*. Ed. A. Montagu. New York 1969 s. 219 - 235.

łych skojarzeń, a nie narzucających się podobieństw odegrały pewną rolę w postępie i rozwoju określonych dziedzin matematycznych. Wydaje się, iż także złudność niektórych analogii hipotetycznie wprowadzonych mogłaby być bliżej ujaśniona, gdyby analizą objąć także paradoksy, do których doprowadziło nieuprawnione stosowanie rozumowania przez analogię [13].

Dla uzyskania bardziej zasadnej opinii w sprawie analogii między tym, co skończone, a tym, co nieskończone, poprzestaniemy jednak na analizie i odpowiednim uporządkowaniu przykładów tych rodzajów omawianej analogii, które mogą być zaliczane do tzw. jasnych (oczywistych) albo wyraźnych analogii. Mają one już ugruntowaną pozycję w matematyce. Rezultaty otrzymane na zasadzie rozumowań przeprowadzonych dzięki stwierdzonym wcześniej analogiom zostały włączone do matematyki jako wartościowe i nie prowadzące do antynomii. Sądzimy więc, że rozważenie takich przypadków pozwoli lepiej wniknąć w naturę analogii między tym, co skończone, i tym, co nieskończone, w jej najmocniejszej i zarazem najcenniejszej wersji.

Stawianie zagadnień na podstawie przejścia od tego, co skończone, do tego, co nieskończone, znajduje swoją najbardziej wyraźną postać w uogólnianiu różnych operacji i działań oraz w uogólniającym przenoszeniu (czasem tworzeniu) pojęć, dotyczących obiektów nieskończonych. Prostą już konsekwencją jest podawanie coraz ogólniejszych hipotez, które ujmują i bliżej charakteryzują własności wprowadzonych pojęć (i obiektów). Osobnymi zagadnieniami są problemy związane ze stosowaniem odpowiednich metod oraz tzw. problemy graniczne. Spróbujmy kolejno zaprezentować odnośne przykłady.

Najprostszą operacją w matematyce (nawet elementarnej) jest operacja liczenia elementów jakiegoś zbioru. Gdy jest on skończony, sprawa nie przedstawia żadnej trudności. Nieco bardziej komplikuje się, gdy idzie o liczenie elementów zbioru nieskończonego. Zawodzi bowiem w tym przypadku intuicja wiązana z pojęciem liczenia. Nie tylko trudno wskazać metodę liczenia, ale trudno też oprzeć się przypuszczeniu, że każdy zbiór nieskończony składa się z tej samej liczby elementów. A przecież tak nie jest. Istnieją zbiory różnych mocy, tzn. nieskończone, ale nie zawierające tej samej nieskończonej liczby elementów. Wystarczy porównać zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb rzeczywistych. Obydwa są nie-

[13] Sugerowane zagadnienia mogłyby okazać się interesującym tematem samym dla siebie, wymagałyby dokładniejszych analiz historycznych związanych z rozwojem i kolejnymi etapami proponowanych rozwiązań w zakresie tej problematyki Musiałyby też z konieczności odwoływać się często do przypuszczeń i odkrywania nie ujawnionych supozycji. Należałoby też zastosować inną, bardziej adekwatną, jak np. psychologiczną, metodę do tego typu analiz.

skończone, ale zbiór liczb rzeczywistych zawiera istotnie więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych. Łatwo jest stwierdzić, że nie można skonstruować przekształcenia, które by pozwoliło wszystkim elementom zbioru liczb naturalnych przyporządkować wszystkich elementów zbioru liczb rzeczywistych. Podczas gdy zostaną wyczerpane wszystkie liczby naturalne, pozostaną jeszcze ciągle nie wykorzystane liczby rzeczywiste. Nasuwa się więc przypuszczenie, że skoro dla zbiorów skończonych istnieją liczby naturalne wyrażające ilość ich elementów, to także i zbiorom nieskończonym można przyporządkować jakieś liczby (liczby kardynalne), które podobnie jak tamte wyrażać będą w jakimś sensie ilość ich elementów.

Istotnie, każdemu zbiorowi można przyporządkować jego moc, którą nazywa się także liczbą kardynalną tego zbioru. Jedna i ta sama liczba kardynalna jest przyporządkowana dwom różnym zbiorom A i B wtedy i tylko wtedy, gdy te zbiory są równej mocy albo — jak się mówi zamiennie — są równoliczne. O dwóch zbiorach A i B mówi się, że są równoliczne, gdy istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru A na zbiór B, tzn. takie, które różnym elementom zbioru A przyporządkowuje różne elementy zbioru B. Łatwo jest stwierdzić, że relacja równoliczności jest relacją równoważnościową, dlatego zbiory między sobą równoliczne można zaliczyć do jednej klasy, którą charakteryzuje odpowiednia liczba kardynalna. Najmniejszą liczbą kardynalną nieskończoną jest liczba alef-zero przyporządkowana wszystkim zbiorom równolicznym ze zbiorem liczb naturalnych. Zatem określa ona nieskończoność typu przeliczalnego. Liczba kardynalna odpowiadająca zbiorowi liczb rzeczywistych jest większa od alef-zero. Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywa się zbiorami mocy *continuum* [14].

Nie trudno jest zauważyć, że pojęcie równoliczności zbiorów stanowi dość precyzyjne uogólnienie pojęcia liczenia elementów jakiegoś zbioru. Konstrukcja zaś przekształcenia ustalającego równoliczność (o którym mowa jest w definicji) zbiorów jest uogólnieniem samej operacji liczenia elementów jakiegoś zbioru bez konieczności odwoływania się do jakichś liczb charakteryzujących tę ilość. Wreszcie liczba elementów jakiegoś zbioru skończonego ma swoje uogólnienie w zbiorze nieskończonym jako odpowiadająca jej moc zbioru. W myśl bowiem przedstawionej tu bardzo szkicowo teorii mocy zbiorów można w szczególności zbiorom skończonym przyporządkować odpowiednie liczby kardynalne. Na przykład zbiorowi pustemu przyporządkowuje się liczbę zero, natomiast zbio-

[14] Zob. np.: K. Kuratowski. *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. Wyd. 5. Warszawa 1972 s. 58 - 59; H. Rasiowa. *Wstęp do matematyki współczesnej*. Wyd. 3. Warszawa 1971 s. 28.

rowi złożonemu z n elementów (dla n = 1, 2, 3,...) liczbę n jako jego liczbę kardynalną. Zaś równość mocy jest uogólnieniem równej liczebności zbiorów. Warto odnotować, że uogólnione pojęcia dają się stosować zarówno do zbiorów skończonych, jak i nieskończonych.

A zatem takie pojęcia jak wspomniana tu „moc zbioru" są pojęciami analogicznymi, które zostają wprowadzone na podstawie pewnej ogólnej analogii między zbiorami skończonymi i nieskończonymi. Odnoszą się zarówno do jednych, jak i do drugich, choć nie w jednakowym stopniu ściśle charakteryzują obydwa rodzaje zbiorów. Moc zbiorów skończonych jest konkretną liczbą naturalną wyrażającą liczbę elementów rozważanego zbioru, zaś moc zbioru nieskończonego ustala „typ nieskończoności" ze względu na liczbę elementów w porównaniu z podstawowym zbiorem liczb naturalnych [15].

Działania przeprowadzane na liczbach znajdują tu także swoje uogólnienie. Tworzenie sum albo iloczynów (liczbowych) może być „rozciągnięte" do nieskończoności, tzn. może być dopuszczona nieskończona liczba składników lub czynników — mówi się wtedy o tworzeniu sum czy iloczynów nieskończonych; albo może być „rozciągnięte" także na zbiory nieskończone jako obiekty, na których też można te działania wykonywać, i to bez względu na to, czym są elementy tych zbiorów (liczby, punkty czy jeszcze jakieś inne obiekty matematyczne). I z jednym, i z drugim sposobem swoistej ekstrapolacji można niemal na każdym kroku spotkać się w matematyce. Odróżnienie ich od siebie jest konieczne z uwagi na możliwość pojawienia się nowych lub co najmniej zmianę starych własności działań uogólnianych. Pytania bowiem o własności nieskończonych (ze względu na liczbę elementów) działań oraz działań wykonywanych na obiektach (w szczególności zbiorach) nieskończonych (podstawą wyróżniającą jest tu aspekt jakościowy), a także działań nieskończonych przeprowadzonych na zbiorach nieskończonych (uwzględnione tu są obydwa aspekty) są naturalnymi zagadnieniami, rodzącymi się w związku z dokonanymi rozszerzeniami. Jeszcze innymi są pytania

---

[15] Podobnie jest np. z pojęciem miary zbioru, które powstaje w wyniku uogólnienia takich pojęć, jak: „długość linii krzywej", „pole pewnej powierzchni" oraz „objętość pewnej bryły". Zamiast mówić długość, pole, objętość mówi się ogólnie miara jednowymiarowa, dwuwymiarowa, trójwymiarowa. Z nową terminologią związane są pewnego rodzaju uogólnienia, bowiem pojęcie miary może być stosowane do zbiorów położonych w przestrzeniach euklidesowych dowolnego wymiaru (także i nieskończenie wymiarowych) oraz może być odnoszone do szerszej klasy zbiorów, aniżeli to da się uczynić w przypadku zwykłych pojęć długości, pola, objętości. Np. nie można mówić o długości zbioru liczb wymiernych przedziału $\langle 0,1 \rangle$, natomiast można mówić o jego mierze. I znowu, można wyróżnić zbiory skończone oraz nieskończone z punktu widzenia miary. Takim pojęciem jest też np. typ porządkowy i odpowiadająca mu liczba porządkowa.

dotyczące własności działań wykonywanych na liczbach kardynalnych i liczbach porządkowych przyporządkowanych odpowiednim zbiorom nieskończonym. Odpowiedzi na te i im podobne pytania mogą stanowić dalej punkt wyjścia do następnych zagadnień, które z nimi wiążą się niemal bezpośrednio. Dla uogólnionych działań nieskończonych będą to np. tzw. problemy graniczne obejmujące badanie wartości i procesów granicznych[16]. Dla jednych i drugich zaś wystąpi to wyraźnie w zagadnieniu metod zastosowanych do nieskończoności. Czy mogą one być prosto przeniesione z obiektów skończonych? Czy są podobne tylko pod pewnymi względami do metod stosowanych? Czy może obiekty nieskończone, do których mają być zastosowane, wywierają wpływ na pewną modyfikację tych metod znanych z rachunków skończonych?

Pewien przykład, który przytacza G. Pólya dobrze, jak się wydaje, ilustruje obie sprawy, a także dostarcza pewnych argumentów na rzecz naszego stanowiska. Szwajcarski matematyk L. Euler spróbował zastosować metodę rozkładania na czynniki liniowe wielomianów, która w równaniach algebraicznych pozwala ustalić pewne związki między pierwiastkami a współczynnikami równania do równań niealgebraicznych. To postępowanie było jedynie dopuszczalne na podstawie analogii, którą on sam potem nazwał analogią nieskończoności. Tak jak inni matematycy przed Eulerem przechodzili od skończonych różnic do nieskończonych,

[16] Wystarczy zwrócić uwagę np. na sposób wprowadzenia całki funkcji f(x) jako sumy algebraicznej pól ograniczonych przez wykres tej funkcji i oś 0x, która w granicy daje wartość całki. Innym jest np. zagadnienie zbieżności szeregów (sum) nieskończonych, iloczynów nieskończonych czy po prostu rozmaitych ciągów uogólnionych. Nieskończone szeregi są analogiczne do skończonych sum, które są dla nich wartościami granicznymi. Podobnie całki niewłaściwe są analogiczne do całek oznaczonych, które stanowią ich graniczne wartości. Inną egzemplifikacją jest wprowadzenie np. punktu nieskończenie odległego na prostej albo tzw. punktu niewłaściwego prostej. Upraszcza to znacznie strukturę geometrii i przydaje się do jednolitego jej ujęcia. Jest to podobna sytuacja do tej, która sugerowała rozszerzenie pojęcia liczby dla usunięcia ograniczeń w odejmowaniu i dzieleniu. Myślą przewodnią i tutaj jest pragnienie zachowania w dziedzinie rozszerzonej tych praw, które fungowały w dziedzinie pierwotnej. Zgodnie z przyjętymi umowami punkt w nieskończoności jest określony albo przedstawiony za pomocą rodziny prostych równoległych, które w nim się przecinają. Umowy te są tak dobrane, że prawa rządzące relacją koincydencji pomiędzy zwykłymi punktami i prostymi pozostają w dalszym ciągu prawdziwe, natomiast wyznaczenie punktu przecięcia dwóch prostych, które poprzednio było możliwe tylko w przypadku prostych nierównoległych, teraz nie napotyka ograniczenia. Można udowodnić, że między punktami i prostymi zachodzi pewien rodzaj dwoistości. W geometrii rzutowej, w odróżnieniu od metrycznej, właśnie dzięki temu wprowadzonemu punktowi w nieskończoności i dualnej względem niego prostej w nieskończoności można zestawiać twierdzenia dwoiste, które są prawdziwe zarówno w odniesieniu do punktów, jak i do prostych.

od sum skończonych do sum nieskończonych, od skończonych iloczynów do iloczynów o nieskończenie wielu wyrazach, tak Euler od równania algebraicznego skończonego rzędu przeszedł do równania rzędu nieskończonego, stosując do nich metody znane dla przypadku skończonego.

Euler rozpatrywał równanie sin x = 0, które w rozwiniętej postaci można zapisać następująco:

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots=0$$

Ponieważ lewa strona jest „nieskończonego stopnia" i posiada nieskończenie wiele wyrazów, więc równanie ma nieskończenie wiele pierwiastków: 0, π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, ...
Wyklucza się pierwiastek 0 i dzieli się lewą stronę równania przez odpowiadający temu pierwiastkowi czynnik liniowy x, stąd otrzymuje się równanie:

$$1-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots=0$$

z pierwiastkami: π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, ...
Dla równania algebraicznego stopnia 2n można otrzymać analogiczny układ pierwiastków, który pozwala na odpowiednie rozłożenie wielomianu na czynniki liniowe [17]. Na podstawie zauważonej analogii Euler

---

[17] Równanie n-tego stopnia $a_0+a_1x+a_2x+\ldots+a_nx^n=0$ ma n różnych pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ i daje się przedstawić w postaci iloczynu n czynników liniowych

$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

Przez porównanie współczynników przy tych samych potęgach x otrzymuje się np. $a_{n-1}=-a_n(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$.
Inny sposób rozkładu na czynniki otrzymuje się przy założeniu, że żaden z pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nie jest równy zero, lub przy założeniu, że $a_0\neq0$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Gdy równanie jest stopnia 2n i przybiera postać

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\ldots+(-1)^nb_nx^{2n}=0,$$

ma 2n różnych pierwiastków $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \ldots \beta_n, -\beta_n$, wtedy rozkład wygląda inaczej

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\ldots+(-1)^nb_nx^{2n}=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

i np.

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\ldots+\frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

Zob. G. Pólya. *Mathematik und plausibles Schliessen*. T. 1: *Induktion und Analogie in der Mathematik*. Basel 1962 s. 41 - 47.

zastosował i tutaj podobne rozłożenie na czynniki i otrzymał:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Przez porównanie wyrazów z równymi potęgami x po obu stronach równości $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots$ otrzymał sumy wielu godnych uwagi szeregów:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Rezultaty te, jakkolwiek budziły zastrzeżenia wielu współczesnych matematyków, ponieważ były osiągnięte metodami dotychczas nie używanymi do takich celów, zgadzały się ze znanymi skądinąd wartościami liczbowymi rozważanych szeregów. Ale dopiero wtedy zostały one uznane za uprawnione, gdy znaleziono ścisły dowód (a nie tylko liczbowe potwierdzenie) dla wartości jednego z rozpatrywanych szeregów.

Nie zawsze jednak tak prosto da się przenieść metody z rachunków skończonych na nieskończone. Widać to jasno na innym przykładzie. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ jest zbieżny, jego suma k może być więc oszacowana przez dwa pierwsze wyrazy szeregu $\frac{1}{2}<k<1$. Jeżeli utworzy się szereg $2k=\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\ldots$, łatwo można zauważyć, że występuje w nim zawsze jeden wyraz z parzystym mianownikiem oraz po dwa wyrazy z takim samym mianownikiem nieparzystym. Po zestawieniu wyrazów z tymi samymi mianownikami otrzyma się:

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\ldots\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=k$$

Ale przy założeniu $k\neq 0$, 2k jest zawsze różne od k.

Błąd polega tu na tym, iż metodę obliczania skończonej sumy przenosi się bez żadnych ograniczeń na sumę nieskończonego szeregu. Przyjęto bowiem, że suma nieskończonej liczby członków (podobnie jak skończona) jest zawsze równa, bez względu na kolejność sumowania poszczególnych wyrazów. Przytoczony przykład pokazał, że było to błędem. Suma nieskończonego szeregu jest — według definicji — granicą ciągu sum częściowych i jeśli zmienimy kolejność nieskończonej liczby wyrazów, zmienimy istotnie ten ciąg. A zatem niebezpieczeństwo błędu przy korzystaniu z niesprawdzonej analogii może również zrodzić nowe pytania np. o zakres ograniczenia nałożonego na stosowanie tej analogii. Okazuje się,

iż nie zawsze przemieszczenie wyrazów nieskończonego szeregu zmienia jego sumę. Znaleziono odpowiednie twierdzenia orzekające, że dla szeregów bezwzględnie zbieżnych ograniczający warunek nie jest potrzebny; suma takich szeregów jest zawsze równa i nie zależy od kolejności sumowania poszczególnych wyrazów.

Wydaje się więc, że uogólnianie odnośnie do metod (czy lepiej analogia dająca podstawę do uogólniania w zakresie stosowanych metod), zwłaszcza w stawianiu zagadnień dotyczących nieskończoności, może mieć miejsce tylko wtedy, gdy sprawdzona wcześniej zostanie analogia zachodząca między obiektami skończonymi i ich nieskończonymi uogólnieniami. Gdy trudno jest stwierdzić, czy taka analogia jest dostatecznie uprawomocniona, proste przeniesienie metod może prowadzić do błędnych wniosków. A nawet wtedy, gdy otrzymane na tej drodze rezultaty wykazują duży stopień prawdopodobieństwa, należy poszukać dowodu usprawiedliwiającego zastosowanie narzucającej się analogicznej metody. Wydaje się, że bez względu na to, do jakich rozwiązań i wyników prowadzi analogia między tym, co skończone, a tym, co nieskończone, jej rola w odkrywaniu, poszukiwaniu i ustalaniu nowych obszarów problemowych w matematyce jest nieodzowna, a zarazem niezwykle typowa dla myślenia abstrakcyjnego typu matematycznego.

Wypada jeszcze przynajmniej wspomnieć o tym rodzaju analogii między skończonością a nieskończonością, który występuje przy wszelkich problemach granicznych. Dokładne przeanalizowanie odpowiednich przykładów charakteryzujących i naturę i funkcję, jaką pełni ona we wszystkich niemal dziedzinach matematyki, wymagałoby osobnych rozważań. Dla naszego tematu wystarczy więc, jak się zdaje, zauważyć, że samo pojęcie granicy jest pojęciem analogicznym i wszędzie, gdzie ono występuje, można dostrzec mniej lub bardziej wyraźną analogię. „Zbieżność" (posiadanie granicy) jest tego typowym przykładem. Może bowiem odnosić się do ciągu liczbowego, ciągu funkcyjnego, szeregu nieskończonego, całki niewłaściwej, zbioru punktów przestrzeni itp.; może być zbieżność zwykła, jednostajna, przeciętna z kwadratem, w sensie normy itp. A to świadczyłoby o tym, że zarówno między obiektami matematycznymi, dla których ma sens mówienie o zbieżności, jak i między rozmaitymi odmianami zbieżności (na co wskazują językowe sformułowania) zachodzi pewna analogia. Matematycy, wprowadzając pojęcie granicy dla jakiegoś typu ciągu (uogólnionego), czynią to najczęściej na podstawie dobrze sformułowanej definicji, która nie musi ułatwiać dostrzeżenia analogii będących źródłem płodnych i wartościowych skojarzeń. Ale też porównanie wszystkich definicji dotyczących np. zbieżności mogłoby być interesującym zabiegiem poznawczym. Można przypuszczać, iż pokazałoby jaśniej podobieństwo (które jest podstawą wspomnianych analogii) za-

równo w płaszczyźnie syntaktycznej, jak i semantycznej [18]. Mogłoby tę sprawę bliżej ujaśnić także porównawcze zestawienie twierdzeń o zbieżności, które pozwoliłoby zbadać i ustalić charakter podobieństwa odpowiednich układów własności. Te podobne własności — jak się wydaje — pozwalają zachować tę samą terminologię, gdy idzie o rozmaitość odmian zbieżności. Należy więc stwierdzić, że analogia występująca w płaszczyźnie semantycznej znajduje swe wyraźne odbicie w syntaktycznej, i odwrotnie, analogiczność języka wyznacza i wskazuje na analogiczność dziedzin opisywanych w tym języku. Wiele razy podkreślaliśmy już to wzajemne sprzężenie różnych przejawów analogii [19]. W stawianiu nowych zagadnień trudno ustalić pierwotność którejś z nich. Wydaje się, że i jedna, i druga może być dobrym i ważnym stymulatorem twórczych pomysłów.

3. Sumując powyższe uwagi o analogii między tym, co skończone, i tym, co nieskończone, należy zwrócić uwagę, iż w postulowaniu nowej problematyki nie tylko jej funkcja inwencyjna jest szczególnie ważna, lecz także i taka, którą można by nazwać informatywną lub komunikatywną. Skoro bowiem to, co nieskończone jest niejednokrotnie ustanawiane i formułowane na podstawie tego, co skończone, to niewątpliwie pewnych informacji o nowych i nieznanych obiektach nieskończonych oraz o ich związkach z dotychczas znanymi dostarcza właśnie rzeczona analogia, a przynajmniej dzięki niej mogą być badane zagadnienia sugerowane przez hipotetycznie przenoszone określone własności. Warto również podkreślić nowy aspekt funkcjonalnych własności analogii, który na przykładzie omawianego rodzaju analogii (między tym, co skończone, i tym, co nieskończone) bardziej się uwydatnił. Dzięki przeprowadzonym analizom można bowiem zasadnie stwierdzić, że analogia tu omawiana wykazuje w sposób szczególny rolę zwornika każdej dyscypliny, w której występuje. Scala bowiem i wiąże rozproszone nieraz wyniki, łączy to, co bardziej abstrakcyjne, z łatwiejszym do zbadania finitystycznym ujęciem niektórych obiektów. Ustanawia także związek między różnymi dziedzinami matematyki przez obecność w nich rozmaitych problemów granicznych, które pojawiają się w związku z przejściem (granicznym) do nieskończoności. Przyczynia się w ten spo-

---

[18] Na przykład analogiczne są nieskończone szeregi i całki na więcej niż jeden sposobów do sum skończonych, które są wartościami granicznymi; rachunek różniczkowy jest analogiczny do rachunku różnicowego (pochodna jest granicą ilorazu różnicowego); równania różniczkowe jednorodne i równania różniczkowe liniowe są analogiczne w pewien sposób do równań algebraicznych. Zob. Pólya, jw. s. 53.

[19] Buczek, jw. s. 199, 213, 215, 224 n.

sób do scementowania całej matematyki i utworzenia z niej całościowego systemu wiedzy. Wydaje się więc, że matematyka charakteryzuje się nie tylko metodą dedukcyjną dowodzenia swoich twierdzeń, ale też (choć na innym poziomie) analogią, która przenika całe matematyczne myślenie, i to zarówno w dochodzeniu do problemów, jak i w wyszukiwaniu sposobów ich rozwiązania. Inwencyjna i ekstrapolacyjna rola analogii (w myśleniu matematycznym), chociaż jest obwarowana różnego rodzaju warunkami ograniczającymi powszechność i niezawodność stosowania rozumowania przez analogię, jest równocześnie tą jej funkcją, która myśleniu matematycznemu (zwłaszcza inwencyjnemu) nadaje swoistą cechę analogiczności.

Analizy ujaśniające, wydaje się, że pozwalają stwierdzić wyraźne podobieństwo zachodzące między tu rozważaną analogią a innymi jej rodzajami [20]. Wszystkie noszą znamię podobnych struktur myślowych biorących udział w odkryciach matematycznych. Stanowią źródło twórczych sił matematyki. Zestawienie biegunowe: skończone — nieskończone, podobnie jak zestawienia: szczegółowe — ogólne, uproszczone — skomplikowane, wykazują pewne podobieństwo funkcjonalne we wzajemnym oddziaływaniu na siebie, w wywieraniu inspirującego wpływu i dostarczaniu sugestywnych pomysłów. Wszystkie wymienione postacie analogii są przejawami podobnych tendencji w twórczym myśleniu matematycznym. Jeżeli znany jest jeden z członów analogii, to zaraz daje asumpt do szukania nowych obiektów, nowych dziedzin przedmiotowych, sprawdzania własności konstruowanych obiektów, formułowania nowych zagadnień, wypowiadania nowych twierdzeń. To podobieństwo funkcjonowania daje się zauważyć zarówno między członami każdej z omawianych relacji analogii, jak i między poszczególnymi typami tych analogii. Podobną bowiem rolę w dostarczaniu twórczych pomysłów i formułowaniu zagadnień spełniają analogie między tym, co szczegółowe, i tym, co ogólne, tym, co uproszczone, i tym, co skomplikowane, tym, co skończone, i tym, co nieskończone, jak też człony wymienionych związków. Skłonność do ekstremalnego myślenia jest typową procedurą badawczą matematyków.

Trudno byłoby zbadać i ustalić, czy mamy tu do czynienia ze swego rodzaju izofunkcjonalizmem. Ale zasadnie można stwierdzić, iż wszystkie wymienione typy analogii odgrywają ogromną, naturalną rolę inwencyjną oraz unifikującą w każdej dziedzinie matematycznej. Nie tylko bowiem biorą udział we wzroście problematyki, lecz także scalają poszczególne dziedziny.

One są często zwornikami każdej dziedziny, a nawet całej matema-

[20] Zwłaszcza omówionymi w rozdz. II tamże s. 200 - 224.

tyki. Stanowią ogólne tendencje, dające się zauważyć w matematyce, i to zarówno w jej rozwoju historycznym, jak i w jego rezultacie, czyli ukształtowanej współcześnie nauce. Aby wzmocnić uzasadnienie (usprawiedliwienie) tej tezy, należałoby dokładniej prześledzić, jak rozwijało się ujmowanie matematyki na przestrzeni dziejów. Rozwój pojmowania matematyki, rozwój różnych określeń matematyki i udział w nim analogii ujawniłyby jaśniej — jak się wydaje — unifikującą rolę wszelkich odmian analogii w myśleniu matematycznym. Byłoby to z pewnością interesujące, chociaż odrębne zagadnienie. Możemy jednak już teraz stwierdzić, że skoro analogia — jak to starano się pokazać — odgrywa znaczną i niebanalną rolę w wyznaczaniu problematyki matematycznej, to tym samym wywiera wpływ na coraz to pełniejsze i lepsze jej określenie. A w tych próbach określania znajduje odbicie stopniowe uogólnianie przedmiotu matematyki.

DIE ROLLE DER ANALOGIE ZWISCHEN ENDLICHKEIT UND UNENDLICHKEIT IN DER FRAGESTELLUNG DER MATHEMATISCHEN PROBLEME

Zusammenfassung

In letzter Zeit bemerkt man den Intensivitätswuchs von Forschungen auf dem Gebiet der Heuristik. Es wurde viel zum Thema der Analogiefunktionierung in der Hypothesestellung in empirischen Wissenschaften geschrieben. Dagegen beschäftigte man sich minder zu dieser Zeit mit der Rolle der Analogie in der Mathematik. Und vorläufig scheint sich die mathematische Schöpfung ausnahmsweise oft auf allerlei Ähnlichkeiten zu stützen. Besonders zugelangen zu den neuen Problemen kann man aus der Ähnlichkeit Nutzen ziehen. Dieser Artikel knüpft unmittelbar zu dieser Problematik an.

Man untersucht darin näher die Funktionierung der Analogie im schöpferisch--mathematischen Denken dazwischen, was endlich und unendlich ist. Die Überlegungen wurden auf Grund der zwei Oppositionsstellungen unternommen, die eine Weise des Verständnisses von Unendlichkeit in der Mathematik: potentieller Unendlichkeit von Aristoteles und aktueller Unendlichkeit von Bolzano betraf. Es wurde festgestellt, daß in moderner Mathematik nach den vorgeschlagenen Lösungen von Bolzano gehend, unterscheidet man unendliche Menge als Erfolg der mathematischen Operationen von bloßer unendlicher Operation. Es erwies sich das hilfreichend für die Charakterisierung des erwägten Typs der Analogie. Es wurde auch unterstriechen, daß in dem Vergleich zu den anderen Typen der Analogie, die in dem mathematischen Denken als (umständlich — allgemein, vereinfacht — kompliziert) hervortreten, gibt es für sie mehr wesentliche Unterschiede und qualitative Sprünge. Jedoch so für die mathematische Schöpfung, die Extrapolation hätte sich unvolle gezeigt, wenn die Analogie zwischen der Endlichkeit und der Unendlichkeit nicht ausreicht. Man suchte Begründung in dekenden Kennzeichen solcher Strukturen des menschlichen Gemütes wie: Spontanität, Dy-

namik und Streben nach den immer kühnen Verallgemeinerungen, in denen man von den bemerkbaren oder vermutlichen Analogien benutzen.

Die Analyse der entsprechend angepaßten Exemplifikationen erlaubten Extrapolation zu der Unendlichkeit der verschiedenen Operationen von Wirkungen, Begriffen und Methoden unterscheiden. Abgesondert wurde die in allerlei Grenzprobleme hervorgetretene Analogie untersucht. Auf diesem Hintergrund wurde auch die ganze Reihe von konkreten Fragen formuliert, die sich fast in der natürlichen Weise auf Grund der bemerkbaren oder vermutenen Analogie zwischen der Endlichkeit und Unendlichkeit aufdrängen.

Es erwies sich darin eine Inventions-, Extrapolations-, Informative- und Unifizierte Funktion der bedächtigten Analogie. Es wurde auch wirkliche funktionelle Ähnlichkeit mit anderen Analogiearten hervorgehoben, die sich in dem mathematischen Inventionsdenken entstehen. Man hat doch besondere Aufmerksamkeit auf die Schwierigkeiten gemacht, die bei der mechanischen Anwendung der vermutenen Analogie ohne Beschränkung entstanden, sowie diese, die sich immer dort erschienen, wo wir die Grenze des Intuitionsbereichs und der Schöpfungsinspiration gelangen, die sich von der diskursiven Erfassung entwiechen sind.